

EXAMEN DERIVADAS

1.- Definición de función derivada de una función.

Utilizando la definición, calcula las derivadas de las siguientes funciones y halla la pendiente de las tangentes a estas curvas en el punto $x=1$, indica también el crecimiento en dicho punto. (4 puntos)

a) $f(x) = \frac{1}{2x}$

b) $g(x) = x^2 - 5$

2.- Halla las derivadas de las siguientes funciones:

(5 puntos)

a) $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{5x}$

b) $y = \sqrt{\cos x}$

c) $y = \ln \left[\frac{x-2}{x+2} \right]$

d) $y = (x^2 + 3x) \cdot e^{x^2}$

e) $y = 2^x \cdot \sin(x^2 - 3)$

3.- Pon ejemplos de funciones cuya derivada sea $f'(x) = 3x^2$ ¿Cuántas existen? ¿Por qué? (1 punto)

SOLUCIONES

1.- a) $f(x) = \frac{1}{2x}$ La función derivada es $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, de donde:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{2x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{2xh(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2x(x+h)} = -\frac{1}{2x^2}$$

La pendiente de la tangente en $x=1$ será $f'(1) = -\frac{1}{2 \cdot 1^2} = -\frac{1}{2}$ y, como es negativa, esto significa que en el punto 1 la función f es decreciente.

b) $g(x) = x^2 - 5$ La función derivada es $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, de donde:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 5 - (x^2 - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 5 - x^2 + 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x$$

La pendiente de la tangente en $x=1$ será $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ y, como es positiva, esto significa que en el punto 1 la función f es creciente.

2.- a) $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{5x}$

$$y' = \frac{(2x-3) \cdot 5x - (2x^2 - 3x + 2) \cdot 5}{(5x)^2} = \frac{10x^2 - 15x - 10x^2 + 15x - 10}{25x^2} = \frac{-10}{25x^2} = -\frac{2}{5x^2}$$

b) $y = \sqrt{\cos x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

c) $y = \ln \left[\frac{x-2}{x+2} \right]$ $y' = \frac{1}{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+2) - (x-2) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+2}{\frac{x-2}{x+2} \cdot (x+2)^2} = \frac{4}{x^2 - 4}$

$$y' = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2 - 4}$$

d) $y = (x^2 + 3x) \cdot e^{x^2}$ $y' = (2x + 3) \cdot e^{x^2} + (x^2 + 3x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

$$y' = (2x + 3) \cdot e^{x^2} + (2x^3 + 6x^2) \cdot e^{x^2} = e^{x^2} (2x^3 + 6x^2 + 2x + 3)$$

e) $y = 2^x \cdot \sin(x^2 - 3)$ $y' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin(x^2 - 3) + 2^x \cdot \cos(x^2 - 3) \cdot 2x$

$$y' = 2^x [\ln 2 \cdot \sin(x^2 - 3) + 2x \cos(x^2 - 3)]$$

3.- $f'(x) = 3x^2$, para que la derivada sea ésta, tendremos que tener $f(x) = x^3$, pero no es la única, ya que la derivada de cualquier número es cero, luego también me

valdrían: $f(x) = x^3 - 7$; $f(x) = x^3 + 2$; $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}$, etc

Es decir, hay infinitas funciones cuya derivada es $f'(x) = 3x^2$